Session 2001

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique
Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Ce sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + 3\mathrm{i} \;\; ; \;\; z_B = 2\sqrt{3} \;\; \text{et} \;\; z_C = 2\mathrm{i}.$$

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe (sur papier millimétré).

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

3) **a)** Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_C$, $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$.
En déduire la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du centre K du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC ; préciser le rayon r de ce cercle.

c) Montrer que le point O appartient au cercle (Γ).

4) On considère le point D, d'affixe $z_D = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

a) Montrer que $z_D = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b) Calculer l'affixe du milieu M du segment $[AD]$.

c) Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.

Exercice 2 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant $\begin{cases} f(\pi) = \sqrt{3} \\ f'(\pi) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

3) Montrer que cette solution f vérifie, pour tout x réel : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation d'inconnue x : $f(x) = 1$; en donner les solutions appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4\pi[$.

Problème (11 points)

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
Soit f la fonction définire sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2x - 4$.

Partie A : Construction de la courbe représentative de *f*

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(3 + 2x\mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{x})$. Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.

c) Soit (C) la courbe représentative de f et soit (D) la droite d'équation : $y = 2x - 4$.
Montrer que (D) est asymptote à (C) en $+\infty$ et étudier la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe (C).

2) a) Calculer la dérivée de f. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $-3\mathrm{e}^{-x} + 2 \geq 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

d) Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$.

3) Tracer (C), (D) et (T) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré).

Partie B : Calcul d'une aire

1) Chercher une primitive de f sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]1\,;\,2[$ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.

b) Préciser, en le justifiant, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 4$. En donner une valeur approchée en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.